GENERALIZZAZIONE DI ALCUNE RELAZIONI CONTENUTE NELLA NOTA DEL PROF. MORERA « SUI POLINOMII DI LEGENDRE ».

Da una Lettera del prof. Gegenbauer, al prof. Morera (*).

Adunanza del 23 gennajo 1898.

. . . . . .

Nel fascicolo dei Rendiconti del Circolo Matematico or ora apparso Ella ha pubblicato una interessante Nota sui polinomii di Legendre, i cui risultati si possono immediatamente estendere alle funzioni $C_n^\nu(x)$ definite dall'equazione:

$$\frac{1}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda^\nu(x)\alpha^\lambda, \qquad \text{(I)}$$

funzioni che io ho investigate in varie memorie.

Qui Le indicherò brevemente soltanto la dimostrazione delle generalizzazioni delle sue formule (I), (II) e (III).

(*) Il prof. Gegenbauer, a proposito della mia Nota « Sui polinomii di Legendre » inserita nel tomo XI dei Rendiconti del Circolo Matematico (pag. 176 e seg.), mi comunicava da tempo alcune notevoli generalizzazioni dei miei risultati, le quali ora col consenso dell'Autore fo conoscere al « Circolo ».

G. Morera.

Si derivi la (I) rispetto ad α e si combini il risultato con

$$\frac{1}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\nu+1}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda^{\nu+1}(x)\alpha^\lambda; \qquad \text{(II)}$$

si ottiene così la relazione corrispondente alla sua formula (I):

$$x\, C_{n-1}^{\nu+1}(x) - C_{n-2}^{\nu+1}(x) - \frac{n}{2\nu} C_n^\nu(x) = 0;$$

imperocchè derivando la (I) rispetto ad x e confrontando colla (II) si ha:

$$\frac{d\, C_n^\nu(x)}{d\, x} = 2\nu\, C_{n-1}^{\nu+1}(x).$$

Si moltiplichi la (II) per $1 - \alpha x$ e si utilizzi la formula:

$$1 - \alpha x = (1 - 2\alpha x + \alpha^2) + \alpha(x - \alpha),$$

si giunge così alla relazione

$$C_n^{\nu+1}(x) - x\, C_{n-1}^{\nu+1}(x) = \frac{n + 2\nu}{2\nu} C_n^\nu(x),$$

la quale è la generalizzazione della sua equazione (II).

Infine, colla moltiplicazione della (II) per $1 - x^2$ e mercè l'impiego della formula

$$1 - x^2 = x(x - \alpha) + \frac{x}{\alpha}(1 - 2\alpha x + \alpha^2) + \frac{\alpha - x}{\alpha},$$

si ottiene la generalizzazione della di lei relazione (III), cioè:

$$n\, C_n^\nu(x) = (n - 1 + 2\nu)\, x\, C_{n-1}^\nu(x) - 2\nu(1 - x^2)\, C_{n-2}^{\nu+1}(x).$$

. . . . . .

Vienna, 19 agosto 1897.

GEGENBAUER.